공리, 규칙 그리고 체계

이 책에서, 우리는 많은 양상 체계들을 논의해왔다. 이 체계들은 종종 양상 체계들이 가진 여러 성질들을 설명하기 위해 소개되어 왔다. 이 부록의 목적은 이 체계들을 정의하는 공리들과 규칙을 나열하고 한 페이지에 모두를 함께 보여주기 위함이다. 이는 공부해온 양상 체계들의 광범위한 영역을 보여줄 것이고, 독자들이 양상 체계들 전체 구성에서 각 체계들이 차지하고 있는 위치를 한눈에 볼 수 있게 해줄 것이다.

정상 체계의 공리들

우리는 우선 우리가 논의했던 정상 체계들을 정의하는 공리를 나열해야 하고, 본문에서 부여했던 이름들을 붙여주어야 한다. 몇몇 경우에는 (특히 연습문제에서) 공리들 또는 체계들이 이름 없이 소개되기도 했고, 이러한 경우 그 이름은 여기서 채워줄 것이다. 다른 몇몇 경우에는 주석에서 이름만 소개되고 그것이 무엇인지는 소개하지 않은 채 넘어가기도 했다. 그러한 공리들 또한 여기서 나열될 것이다. 그리고 마지막으로 다른 연구에 논의되었지만 이 책에서는 없는 공리들도 있다. 그리고 어떤 공리는 그것이 논의된 연구만 인용하고 이 책에서는 그것에 대해 논의하지 않았다. 우리는 양상 체계들에 대해 제안된 공리들의 완벽한 연구를 제공하는 것처럼 사칭하진 않을 것이다.
어떤 공리들은 다른 이름이 있다. 이러한 공리들의 대부분은 Lemmon과 Scott 1977에서 유래하며, Segerberg 1971, Chellas 1980 그리고 다른 저자들에 의해 사용되었다. 이 이름들은 괄호에 넣어줄 것이다. 우리는 양상 명제 논리의 언어를, p.16에서 정의했듯이 L은 원초적 양상연산자로 주어지고, M은 $\sim L\sim$로 정의되는 것으로 가정할 것이다. 공리들은 처음의 언급이 충분한 정보를 제공하지 못하는 몇가지 경우를 제외하고는 소개를 위해서만 나열된다.

K	$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$	(p. 25)
T	$Lp \supset p$	(p. 42)
D	$Lp \supset Mp$	(p. 43)
4	$Lp \supset LLp$	(p. 53)
E	$Mp \supset LMp$	(5, p. 58)
B	$p \supset LMp$	(p. 62)
T_c	$p \supset Lp$	(p. 66)
Triv	$p \equiv Lp$	(p. 65)
Ver	Lp	(p. 67)
E_1	$LMLp \supset p$	(p. 69)
E_2	$MLp \supset LMLLp$	(p. 69)
D_c	$Mp \supset Lp$	(p. 123)
D1	$L(Lp \supset q) \wedge L(Lq \supset p)$	(Lem, p. 128)
F	$(LMp \wedge LMq) \supset M(p \wedge q)$	(p. 131)
M	$LMp \supset MLp$	(p. 131)
G1	$MLp \supset LMp$	(p. 134)
W	$L(Lp \supset p) \supset Lp$	(p. 139)

MV	$MLp \vee Lp$	(p. 141)
R1	$MLp \supset (p \supset Lp)$	(p. 141)
BM	$p \supset LMMp$	(p. 141)
TM	$MLp \supset Mp$	(p. 141)
BV	$ML(p \wedge \sim p) \vee (q \supset LMq)$	(p. 141)
Lem_0	$L((p \wedge Lp) \supset q) \vee L((q \wedge Lq) \supset p)$	(p. 141)
H1	$p \supset L(Mp \supset p)$	(p. 142)
G_0	$M(p \wedge Lq) \supset L(p \wedge Mq)$	(p. 142)
Alt_n	$Lp_1 \vee L(p_1 \supset p_2) \vee \cdots \vee L((p_1 \vee \cdots \vee p_n) \supset p_{n+1})$	(p. 142)
4_t	$(Lp \wedge p) \supset LLp$	(p. 142)
J1	$L(L(p \supset Lp) \supset p) \supset p$	(Grz, p. 142)
Mk	$L(LLp \supset Lq) \supset (Lp \supset q)$	(p. 154)
Mk*	$L(LLp \supset LLLp) \supset (Lp \supset LLp)$	(p. 156)
Seg_n	$(MMp_1 \wedge \cdots \wedge MMp_n) \supset M(Mp_1 \wedge \cdots \wedge Mp_n)$	(p. 158)
H	$L(Lp \equiv p) \supset Lp$	(p. 160)
VB	$MLp \vee L(L(Lq \supset q) \supset q)$	(p. 169)
KH_n	$Ln(L(Lp \equiv p) \supset Lp)$	(p. 170)
N1	$L(L(p \supset Lp) \supset p) \supset (MLp \supset p)$	(Dum, p. 180)
G'	$M^m L^n p \supset L^j M^k p$	(p. 182)
MT_n	$M((Lp_1 \supset p_1) \wedge \cdots \wedge (Lp_n \supset p_n))$	(p. 185)
B^+	$Lp \supset (Mq \supset L(Lp \vee Mq))$	(p. 219)
Z	$L(Lp \supset p) \supset (MLp \supset Lp)$	(Segerberg 1971, p. 84)
P	$MLMp \supset (p \supset Lp)$	(Segerberg 1971, p. 152)
Zem	$LMLp \supset (p \supset Lp)$	(Segerberg 1971, p. 152)
Sch	$L(MLp \supset Lp) \vee Lq \vee L(q \supset r)$	(Segerberg 1971, p. 159)
M18	$(MLp \supset p) \vee (LMq \supset MLq)$	(p. 284)

몇몇 정상 체계들

우리는 체계 S를 바른식의 집합으로 정의하며, 그것의 원소는 그 체계의 정리라고 불린다. 우리는 $\alpha \in S$에 대해 $\vdash_S \alpha$라고 적는다. 양상 명제 논리의 정상 체계(p. 111을 보라)는 모든 PC-타당한 바른식과 K, ($L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$, p. 25)를 포함하는 양상 명제 논리의 바른식들의 집합 S를 뜻한다; 그리고 정상 체계는 α와 β가 S의 원소이면 다음의 규칙들을 사용하여 얻을 수 있는 어떠한 것도 S의 원소가 되는 성질을 가진다:

US: $\vdash \alpha \rightarrow \vdash \alpha[\beta_1/p_1, \cdots, \beta_n/p_n]$.
MP: $\vdash \alpha,\ \alpha \supset \beta \rightarrow \vdash \beta$.
N: $\vdash \alpha \rightarrow \vdash L\alpha$.

가장 약한 정상 양상 체계는 K(p. 24)라고 불리며, 모든 정상 체계 S는 아마도 K + Λ (pp. 39, 111을 보라)로 표현될 수 있는데, 여기서 Λ는 S의 적절한 공리들의 집합을 말한다. S가 양상 논리의 체계일 때, 우리는 S에 추가적인 공리들인 Λ의 원소들을 더함으로써 얻어지는 체계를 나타내기 위해, K + Λ, K + α와 비슷한 방식으로 S + Λ 또는 S + α 의 표기법을 이용할 수 있다.

아래의 목록은 본문에서 이름지어진 대부분의 정상 양상 체계와 몇몇 다른 체계들을 보여준다. 추가적으

로, 어떠한 정상 양상 체계도 공리 목록의 방법을 통해 정의될 수 있을 것이다. 따라서, 우리가 다루지 않은 $KHLem_0$와 같은 체계일지라도, 아는 한에서 K + **H** + **Lem_0**와 같이 나타낼 수 있을 것이다. 어떤 경우에는, 예를 들어 T + **W**와 같은 경우에, 결과적인 체계는 모든 바른식을 포함하기에 비일관적일 것이다. (우리는 비일관적인 체계를 L이라 표기할 것이다.) 한편, 동일한 체계는 다른 방식의 공리들의 결합을 통해서 쉽게 만들어짐을 주의하라. 따라서 T + **E** = T + **4** + **B**. 그리고 체계들이 간단한 의미론에 의해 특성화되는 점은 이미 언급해왔다.

T	K + **T**	(M, p. 41, reflexive frames)
D	K + **D**	(p. 43, serial frames)
S4	T + **4**	(KT4, p. 53, reflexive transitive frames)
S5	T + **E**	(KTE, KT5, p. 58, equivalence frames)
B	T + **B**	(KTB, p. 62, reflexive symmetrical frames)
K4	K + **4**	(p. 64, transitive frames)
KB	K + **B**	(p. 64. symmetrical frames)
KD4	D + **4**	(p. 64, serial reflexive frames)
KDB	D + **B**	(p. 64, serial symmetrical frames)
Triv	K + **Triv**	(pp. 65, 108, one reflexive world)
Ver	K + **Ver**	(pp. 66, 108, one dead end)
KE	K + **E**	(p. 69, euclidian frames)
KBE	K + **B** + **E**	(symmetrical euclidian frames)
T_c	K + $\mathbf{T_c}$	(p. 70, one-world frames)
$S4_n$	K + $\mathbf{4_n}$	(p. 70, If $wR^{n+1}w'$ then wR^nw')
KD_c	K + $\mathbf{D_c}$	(p. 123, every world can see at most one world)
KW	K + **W**	(p. 139, finite irreflexive transitive frames)
$KAlt_n$	K + $\mathbf{Alt_n}$	(p. 142, every world can see at most n-worlds)
BSeg	B + $\mathbf{Seg_n}$ ($1 \leq n$)	(p. 158)
KH	K + **H**	(p. 160, incomplete, KH frames characterize KW)
B^+	B + $\mathbf{B^+}$	(p. 219)

과거의 특정 연구에서 골라낸 양상 논리의 한 영역은 S4의 확장들이다. 아래에 적은 것들 중에는 이 책에서 논의되지 않는 것도 있다. 자세한 논의는 Sobociński, 1964a-c에서 찾을 수 있을 것이다.

S4.1	S4 + **N1**	
S4.2	S4 + **G1**	(p. 134, convergent S4 frames)
S4.2.1	S4.2 + **N1**	
S4.3	S4 + **D1**	(KT4Lem, p. 128, connected S4 frames)
S4.3.1	S4.3 + **N1**	(D, p. 180, discrete time)
S4.4	S4 + **R1**	(p. 284, $(w_1Rw_2 \wedge w_1 \neq w_2 \wedge w_1Rw_3) \supset w_3Rw_2$)
S4.9	S4.4 + **M18**	(p. 284)
S4M	S4 + **M**	(K1, S4.1, p. 131, reflexive final frames)

(K1은 S4M에 대해 Sobociński가 붙인 이름이다)

K1.1	S4 + **J1**	(p. 142, finite partial orderings)

K1.2　K1 + **H1**
K2　S4.2 + **M**
K2.1　K2 + **J1**
K3.1　S4.3 + **J1**　(D*, p. 191, finite reflexive linear frames)
K4'　K2 + **R1**　(K4, S4.2MR1)
(K4는 Sobociński가 붙인 이름이며, Hughes와 Cresswell 1968, p. 266을 보라; K4'은 p. 64의 K4와 혼동되어서는 안된다.)
연구의 다른 영역은 S4를 포함하지 않는 K4의 확장이다. (여기서 K4는 K + Lp ⊃ LLp이며, Sobociński가 K4라고 부르는 체계가 아니다. Sobociński의 K4는 여기서 K4'으로 부른다.) 많은 경우에 이 체계들은 S4의 확장들을 특성화하는 reflexive 프레임들과 대응되는 transitive irreflexive 프레임들에 의해 특성화된다. 따라서, 예를 들어, S4.3은 reflexive connected 프레임들에 의해 특성화되는 반면, K4.3 (K + **Len$_0$**)은 $w \neq w'$에서 wRw' 또는 wRw 등인 transitive irreflexive 프레임들에 의해 특성화된다. 이 체계들은 Segerberg 1971 2권에서 논의된다. 이들의 이름에도 불구하고, 이들은 이전 목록에서 언급된 K1—K3.1의 확장이 아니다.

K4Z　K4 + **Z**
K4.2　K4 + **G0**
K4.2Z　K4.2 + **Z**
K4.2W　K4.2 + **W**
K4.3　K4 + **Lem$_0$**
K4.3Z　K4.3 + **Z**
K4.3W　K4.3 + **W**

여기서 나열된 정상 양상 체계들 대부분을 보여주는 도표는 p. 367의 표 I에 나온다.

비-정상 체계들

비-정상 체계들은 필연화 규칙이 없는 체계들이다. 아래에 설명할 점들만 빼면, 우리가 다룰 이 체계들은 모든 점에서 정상 체계들과 같다. 11장에 기술됐듯이, 가장 오래된 양상 체계는 사실 비-정상 체계였다. 우리는 Segerberg 1971에 따라 비-정상 체계들을 ‘유사-정상 체계’, ‘규칙 체계’, ‘유사-규칙 체계’로 나눌 것이다. 유사-정상 체계들은 K의 모든 정리들과 추가적인 특별한 공리들을 포함하는 체계로서, N은 K의 정리들에는 적합하지만 추가적인 공리에는 적합할 필요가 없다. 의미론적으로 이 체계들은 ‘정상’ 세계들의 부분집합에 대한 가정과 오직 그 세계들에서의 참으로써의 타당성 정의에 의해 연구되었다. 이 책에서 우리는 유사-정상 체계들을 다루지 않았다. (그러나 p. 208, n25를 보라.)
규칙 체계들은 N이 규칙 R* ├α⊃β → ├Lα⊃Lβ로 대체되는 것만 제외하면 정상 체계와 같다. 가장 약한 규칙 체계는 아마도 E2^{0}로 불리는 것이고, 그것의 기초는 간단히 R*에 의한 N의 대체로 구성된다. 의미론적으로 이 체계의 프레임들은 p. 208, n25에 기술된 것과 같으며, 그 프레임에는 정상 세계들에 추가적으로 Lα가 모든 바른식에 대해 거짓인 비-정상 세계가 아마도 존재할 것이다. 만약 우리가 그러한 세계들이 반드시 존재한다고 주장한다면 우리는 MMα(또는 ∼LLα)를 타당하게 만들 수 있으며, 추가적인 공리로 MMp를 더함으로써 E6^{0}라고 부를 체계를 얻게 된다. 만약 모든 세계가 비-정상적이라고 주장한다면 우리는 Mp를 추가하면 된다. E2는 E2^{0}에 **T**의 추가로 얻어지며, 그것의 프레임들은 R이 정상 세계들에 걸쳐 reflexive한 것들이다. E3^{0}은 E2^0 + $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$이며, E3은 E2^0 + **T**이다. E3의

프레임에서 R은 정상세계 내에서 transitive이다.

유사-규칙 체계의 의미론은 타당성이 그 프레임에 기반한 모든 모형에서의 모든 정상 세계들에서의 참으로 정의되는 규칙적 프레임과 관련되며, 이 체계는 pp. 200-202에서 기술된 'Lewis' 체계들 S2와 S3를 포함한다. 모든 규칙 체계 E에 대해, {*L*α: α∈E}로 정의되는 유사-규칙 체계 E*와의 대응이 존재한다. 따라서 $S2^0$은 $E2^0$*, S2는 E2* 등이 성립한다. 이 체계들의 공리적 기초는 11장에 기술되어 있다. 무엇보다도, 우리는 공리로 *MMp*를 더함으로써 적어도 하나의 비-정상 세계가 존재하는 것을 필요로 한다.

이 모든 체계들은 아마도 $E2^0$의 뒤를 잇듯이 나열될 것이다.

E2	$E2^0$ + T
$E3^0$	$E2^0$ + $L(p \supset q) \supset L(Lp \supset Lq)$
E3	$E3^0$ + T
$E6^0$	$E2^0$ + *MMp*
E6	$E6^0$ + T
$E7^0$	$E3^0$ + *MMp*
E7	$E7^0$ + T
E^+	$E2^0$ + *Mp*

$S2^0$	$E2^0$* (즉, {*L*α: α ∈ $E2^0$})
S2	E2*
$S3^0$	$E3^0$*
S3	E3*
S3.5	S3 + $Mp \supset LMp$
$S6^0$	$S2^0$ + *MMp*
S6	S2 + *MMp*
$S7^0$	$S3^0$ + *MMp*
S7	S3 + *MMp*
S8	S3 + *LMMp*
S9	S3.5 + *MMp*

어떠한 비-정상 체계도 $LL(p \supset p)$를 결여하고 있기 때문에 어떠한 정상 체계도 포함하지 않는다. 비-정상 양상 체계의 도표는 p. 368의 표 II에 나온다.

양상 술어 논리

이 절에서 우리는 Part Ⅲ에서 논의한 다양한 체계의 기초들을 요약할 것이다. 술어 논리에 대한 형성 규칙들은 p. 236에서 주어지며, 양상 술어 논리에 대해서는 p. 243에서 주어진다. 양상 술어 논리의 (정상) 체계 S에 대해, LPC + S는 p. 244에서 정의된다.

S'	만약 α가 S의 정리의 LPC 대입-예라면 α는 LPC + S의 공리이다.
∀1	만약 α가 임의의 바른식이고 임의의 변항들 *x*와 *y*와 함께 α[*y*/*x*]가 모든 자유로운 *x*에 대한 자유로운 *y*의 대체라고 한다면, $\forall x\alpha \supset \alpha[y/x]$ 는 LPC + S의 공리이다.
N	만약 α가 LPC + S의 정리면 *L*α도 그러하다.

MP　　만약 α와 $\alpha \supset \beta$가 LPC + S의 정리이면 β도 그러하다.

∀2　　만약 $\alpha \supset \beta$가 LPC + S의 정리이고 x가 α에서 자유롭지 않으면 $\alpha \supset \forall x\beta$는 LPC + S의 정리이다.

BF는 $\forall xL\alpha \supset L\forall x\alpha$의 도식인데(p. 244), 그러면 S + BF는 LPC + S + BF이다. BF 체계의 타당성은 p. 243에서 정의된다. 이 체계의 핵심 특징은 모든 세계들에 대한 각 개체들의 단 하나의 영역이 있다는 것이다. 표준모형은 14장에서 기술됐듯이 S + BF에 대해 정의되어 있다. 만약 S + BF가 완전하다면 그것은 S에 대한 모든 프레임들의 집합에 의해 특성화될 것이다. S + BF의 완전성은 S + BF에 대한 표준모형의 프레이이 S에 대한 프레임인 모든 경우에 성립할 것이다. 특히, S가 K, D, T, K4, D4, B, KB, DB, DE 또는 S5인 경우, 완전성은 명제 체계에 대한 프레임들의 집합에 대해 바로 성립한다. 그러나 그것은 자동적이지는 않으며 S4M + BF, KG1 + BF 또는 S4.2 + BF에 대해서는 성립하지 않는다. 왜냐하면 LPC + S 영역은 가변적이고 「wRw'이면 $D_w \subseteq D_{w'}$」이라는 것에 의해 제공되기 때문이다. (이는 '포섭' 필요조건 이라 불린다.) 존재형식 술어 E가 추가된 체계에 대해, LPCE + S는 p. 293에서처럼 공리화된다.

S'　　정리 S의 임의의 LPC 대입-예는 LPCE + S의 공리이다.

∀1E　　x와 y가 임의의 개별 변항들이고, α가 임의의 바른식일 때, $(\forall x\alpha \wedge Ey) \supset \alpha[y/x]$ 는 LPCE + S의 공리이다.

$\forall^{\supset}$　　$\forall x(\alpha \supset \beta) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\beta)$ (α와 β는 임의의 바른식이고 x는 임의의 변항)

VQ　　x를 제공받은 $\alpha \equiv \forall x\alpha$는 α에서 자유롭지 않다.

UE　　$\forall xEx$

변형규칙은 MP, N,

UG　　$\vdash\alpha \rightarrow \vdash\forall x\alpha$, 그리고

$\mathrm{UGL}\forall_n$　　$\vdash \alpha_1 \supset L(\alpha_2 \supset \cdots \supset L(\alpha_n \supset L\beta) \cdots) \rightarrow \vdash \alpha_1 \supset L(\alpha_2 \supset \cdots \supset L(\alpha_n \supset L\forall x\beta) \cdots)$, ($x$는 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$에서 자유롭지 않다.)

LPCE + S의 의미론에서, 포섭 필요조건은 가정되지 않는다. LPCE + S는 LPC + S에 포함된다. 존재 형식 술어 없이 그러한 체계는 전에서처럼 S', $\forall^{\supset}$, VQ, N 그리고 MP로 공리화된다. 그러나 ∀1E는 아래에 의해 대체된다.

∀1K　　x, y, z가 임의의 개별 변항들이고, α가 임의의 바른식일 때, $\forall y\forall z(\forall x\alpha \supset \alpha[y/x])$는 LPCK + S의 공리이다.

(UGL∀는 이 기초의 부분이 아니다.) BF의 역은 일반적으로 LPCE + S 또는 LPCK + S의 정리인 것은 아니다.

동일성을 얻기 위해서는, S + I를 얻으려면 S + BF에 공리 I1 $x=x$와 공리 도식 I2 $x=y \supset (\alpha\supset\beta)$ (p. 312)를 더하라. S + LN1을 얻으려면 공리 LNI $x\neq y \supset Lx\neq Ly$ (p. 314)를 더하라. I1과 I2는 BF가 없는 체계에도 더해질 수 있다. 경험적 동일성을 얻기 위해서는, I2를 I2'' $x=y \supset (\varphi x_1\cdots x_n\equiv\varphi y_1\cdots y_n)$으로 약화시켜라. 그러한 체계에서 변항들은 '내포적 대상들', W에서 D로의 함수들에 이른다. 그 변항들이 그러한 모든 대상들에 이를 때, 그 논리는 가장 비공리화된다.